SESSION DE 1986

# COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

NB : L'énoncé comporte une erreur : la mesure de surface sur S est l'image de la mesure $\cos\theta\, d\theta\, d\varphi$ sur $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi, \pi]$ par l'application $(\theta, \varphi) \rightsquigarrow (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ – (cf (*))

Dans tout le problème $\mathbf{R}^3$ est muni de la norme euclidienne $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

On rappelle que, en coordonnées sphériques :

$$x = r\cos\theta\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$y = r\cos\theta\sin\varphi$$
$$z = r\sin\theta$$

le laplacien s'écrit : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \operatorname{tg}\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial \theta} + \dfrac{1}{\cos^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right]$

On note $\mathbf{R}^+$ (resp. $\mathbf{R}^{+*}$) l'ensemble des réels positifs (resp. strictement positifs).

On note $\mathbf{R}^{3*}$ l'espace $\mathbf{R}^3$ privé de 0. On note S la sphère unité de $\mathbf{R}^3$.

On note C le corps des complexes, N (resp. Z) l'ensemble des entiers positifs (resp. relatifs).

(*) Les intégrales dans R ou $\mathbf{R}^3$ font référence à la mesure de Lebesgue standard ; les intégrales sur S à la mesure de surface usuelle, image de la mesure de Lebesgue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \times \left[-\pi, \pi\right]$

par le paramétrage ci-dessus : $(\theta, \varphi) \longrightarrow \begin{cases} x(1, \theta, \varphi) \\ y(1, \theta, \varphi) \\ z(1, \theta) \end{cases}$

Suivant l'abus de langage habituel, on dira qu'un élément $f$ de $L^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ s'il existe une fonction deux fois continûment différentiable qui coïncide presque partout avec $f$.

On dit qu'une fonction $f$, définie sur $\mathbf{R}^{+*}$, à valeurs dans C est développable en série de Laurent si, et seulement si, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ telle que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour tout $x > 0$ et ait pour somme $f$.

(On dit qu'une telle série converge si et seulement si les deux séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} x^{-k}$ convergent.)

*La partie IV et l'essentiel de V sont indépendants de II et III.*

*II et III font appel essentiellement à du calcul différentiel et de l'intégration dans* $\mathbf{R}^3$.

*IV et V font appel essentiellement à de l'analyse à une variable réelle; elles comportent moins de calculs mais peut-être un peu plus de difficultés théoriques.*

Tournez la page S. V. P.

## PREMIÈRE PARTIE

Ces questions introduisent soit des résultats utiles pour la suite du problème, soit des méthodes voisines de celles qui sont utilisées ultérieurement, mais présentées ici dans un contexte simplifié.

1° Quelle est la dimension de l'espace vectoriel sur C des polynômes à deux indéterminées, à coefficients complexes, de degré global inférieur ou égal à $n$ ?

2° Calculer l'intégrale, étendue à la sphère S, de la fonction définie par $(x, y, z) \in S \longrightarrow f(x, y, z) = 1 + z^2$.

3° Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^p \left[\frac{d^{p+q}}{dz^{p+q}} (1 - z^2)^q\right] \left[\frac{d^{p+r}}{dz^{p+r}} (1 - z^2)^r\right] dz$ $\quad (0 \leqslant p \leqslant q \leqslant r\,;\ p, q, r$ entiers).

(On pourra faire des intégrations par parties judicieusement choisies, en étudiant à chaque fois les valeurs aux bornes de la « partie tout intégrée ».)

4° Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + \lambda(\lambda + 1)\, y = 0 \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

qui sont développables en série entière au voisinage de $x = 0$.

Quel est le rayon de convergence des séries obtenues?

Pour quelles valeurs de $\lambda$ existe-t-il des solutions polynomiales non nulles?

5° Soit $f$ une fonction continue positive sur $[1, +\infty[$ telle qu'il existe deux constantes positives $a$ et $b$ vérifiant :

$$\forall x \geqslant 1 \qquad f(x) \leqslant a \int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t + b$$

Montrer que $f$ est bornée.

## DEUXIÈME PARTIE

1° On dit qu'une fonction complexe $f$ définie sur S est polynomiale de degré inférieur ou égal à $n$ si elle est la restriction à S d'une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^3$ de degré inférieur ou égal à $n$.

Montrer que toute fonction polynomiale sur S de degré inférieur ou égal à $n$ peut être représentée par un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ de la forme $P(X, Y) + Z\, Q(X, Y)$.

Déterminer la dimension de l'espace vectoriel sur C des fonctions polynomiales sur S de degré inférieur ou égal à $n$.

2° $f$ étant une fonction de $\mathbf{R}^3$ dans C et $r$ un réel positif, on définit la fonction $f_r$ de S dans C par $f_r(M) = f(rM)$.

Montrer que, si $f$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^3)$, la fonction $f_r$ appartient à $L^2(S)$ pour presque tout $r$.

3° Soit $g \in L^2(S)$, $h$ une fonction de $\mathbf{R}^{+*}$ dans C et $f$ la fonction de $\mathbf{R}^{3*}$ dans C définie par $f(rM) = h(r)\, g(M)$.
À quelles conditions (portant sur $h$) la fonction $f$ est-elle dans $L^2(\mathbf{R}^3)$ ?

4° Soit $l$ un entier positif, $m$ un entier tel que $|m| \leqslant l$.

On note $X_{l,m}$ la restriction à S du polynôme de $\mathbf{R}^3$ :

$$(x + i\,\varepsilon\, y)^{|m|} \frac{d^{l+|m|}}{dz^{l+|m|}} \left((1 - z^2)^l\right) \quad \text{où} \quad \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \\ i^2 = -1 \\ \varepsilon = +1 \text{ si } m > 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ si } m < 0 \end{cases}$$

On pose $X_{0,0} = 1$, fonction constante.

Montrer que les $X_{l,m}$, $0 \leqslant |m| \leqslant l$, $m \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{N}$, forment un système orthogonal de $L^2(S)$.

On pose $Y_{l,m} = \dfrac{X_{l,m}}{\|X_{l,m}\|_{L^2}}$.

Montrer que les $Y_{l,m}$ forment une base hilbertienne de $L^2(S)$.

5° On note $H_{l,m}$ le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^3)$ engendré par les fonctions de la forme $h(r)\,Y_{l,m}$, où $h$ vérifie les conditions déterminées au 3° de la deuxième partie.

Montrer que $H_{l,m}$ est fermé dans $L^2(\mathbf{R}^3)$. Déterminer la projection orthogonale d'une fonction $f$ appartenant à $L^2(\mathbf{R}^3)$ sur $H_{l,m}$.

Montrer que $L^2(\mathbf{R}^3)$ est la somme hilbertienne des $H_{l,m}$ ($0 \leqslant |m| \leqslant l$ ; $l \geqslant 0$), c'est-à-dire que les $H_{l,m}$ sont deux à deux orthogonaux et que leur somme est dense dans $L^2(\mathbf{R}^3)$.

## TROISIÈME PARTIE

1° Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$ appartenant à $L^2(\mathbf{R}^3)$, montrer que les projections orthogonales de $f$ sur les $H_{l,m}$ sont encore de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$.

2° Soit M le point de S de coordonnées sphériques $(1, \theta, \varphi)$.

On notera $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ la valeur de $Y_{l,m}$ au point M.

Montrer que $Y_{l,m}$ vérifie la relation :

$$\frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \theta^2} - \operatorname{tg}\theta \, \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\, \frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \varphi^2} + K\, Y_{l,m} = 0$$

où K est une constante qu'on déterminera.

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$ appartenant à $H_{l,m}$, calculer $\Delta f$ en un point de coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ $(r > 0)$.

3° Pour une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$ on définit $H(f) = -\Delta f - \dfrac{1}{r} f$.

Montrer que si $f$ est dans $L^2(\mathbf{R}^3)$ et vérifie $H(f) = Ef$ $(E \in \mathbf{R})$ toutes ses projections $f_{l,m}$ sur les $H_{l,m}$ vérifient des relations similaires :

$$H(f_{l,m}) = E\, f_{l,m}$$

Si on note $a_{l,m}(r)\, Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ la projection de $f$ sur $H_{l,m}$, quelle relation doit alors vérifier la fonction $a_{l,m}$ ?

On définit la fonction $b_{l,m}$ sur $\mathbf{R}^{+*}$ par $b_{l,m}(r) = r\, a_{l,m}(r)$.

Comment se traduisent pour $b_{l,m}$ les propriétés démontrées antérieurement pour $a_{l,m}$ (propriétés de type différentiel et propriétés de type intégral) ?

## QUATRIÈME PARTIE

Soit $l$ un entier strictement positif. L'objet de cette partie est de déterminer pour quelles valeurs du paramètre $\omega$ réel, strictement positif, il existe des solutions $u$ de l'équation différentielle $(E_\omega)$ :

$$u''(x) - \left(\frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{1}{x} + \omega^2\right) u(x) = 0$$

de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{+*}$, et appartenant à $L^2(\mathbf{R}^+)$.

1° On met les solutions sous la forme $u(x) = v(x) \exp(-\omega x)$.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v$.

Déterminer les solutions $v$ de cette équation différentielle développables en série de Laurent. (Ne pas chercher à les exprimer à l'aide de fonctions élémentaires.)

Discuter la dimension de l'espace vectoriel des solutions ainsi obtenues.

**Tournez la page S. V. P.**

2° Pour quelles valeurs de $\omega$ existe-t-il des solutions $v$ polynomiales ? Montrer que les fonctions $u$ associées sont dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Montrer que, parmi les solutions $v$ déterminées à la question précédente (quatrième partie, 1°), seules les fonctions $v$ polynomiales définissent des solutions $u$ non nulles de $(E_\omega)$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.

3° Montrer que l'équation $(E_\omega)$ n'a pas d'autres solutions non nulles dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ que celles qui ont été déterminées à la question précédente.

4° $l$ étant fixé, montrer que les solutions obtenues pour deux valeurs distinctes de $\omega$ sont orthogonales dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.

## CINQUIÈME PARTIE

Soit $l$ un entier positif ou nul, $\omega$ un réel strictement positif.

On étudie dans cette partie les solutions de l'équation différentielle :

$$u''(x) + \left(\omega^2 + \frac{1}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) u(x) = 0 \qquad (E'_\omega)$$

où $u$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}$.

À toute solution $u$ de $(E'_\omega)$ on associe la fonction F définie par :

$$F(x) = (\omega^2 + h(x))\, u^2(x) + u'^2(x)$$

1° En s'inspirant de la méthode utilisée aux 2° et 3° de la quatrième partie pour $(E_\omega)$, étudier le comportement au voisinage de zéro des solutions de $(E'_\omega)$.

2° Montrer que si une solution $u$ de $(E'_\omega)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ et si $l > 0$

$$\int_0^{+\infty} u(x)\, u''(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} u'^2(x)\, dx$$

Que devient cette formule pour $l = 0$ ?

3° On suppose toujours que $u$, solution de $(E'_\omega)$, est dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. Montrer que la fonction F associée à $u$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que, si $u$ n'est pas la fonction nulle, $F(x)$ est strictement positif pour tout $x$ assez grand.

Établir une inéquation différentielle vérifiée par F et en déduire que $u$ est la fonction nulle.

4° Montrer que toute solution $u$ de $(E'_\omega)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est bornée sur toute demi-droite $[X, +\infty[$ où $X > 0$.

(On pourra utiliser la fonction F associée ou montrer que pour tout $A > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x$ supérieur à A, on ait :

$$u^2(x)\,(\omega^2 - |h(x)|) \leqslant \int_A^x |h'(t)|\, u^2(t)\, dt + C)$$